22107225

International Baccalaureate®
Baccalauréat International
Bachillerato Internacional

MATEMÁTICAS
NIVEL SUPERIOR
PRUEBA 1

Miércoles 5 de mayo de 2010 (tarde)

2 horas

Número de convocatoria del alumno

0	0							

INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS

- Escriba su número de convocatoria en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- En esta prueba no se permite el uso de ninguna calculadora.
- Sección A: conteste toda la sección A en los espacios provistos.
- Sección B: conteste toda la sección B en las hojas de respuestas provistas. Escriba su número de convocatoria en cada una de las hojas de respuestas, y adjúntelas a este cuestionario de examen y a su portada empleando los cordeles provistos.
- Cuando termine el examen, indique en la casilla correspondiente de la portada el número de hojas que ha utilizado.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o aproximadas con tres cifras significativas.

No se otorgará necesariamente la máxima puntuación a una respuesta correcta que no esté acompañada de un procedimiento. Las respuestas deben estar sustentadas en un procedimiento o en explicaciones. Aun cuando una respuesta sea errónea, podrán otorgarse algunos puntos si el método empleado es correcto, siempre que aparezca por escrito. Por lo tanto, se aconseja mostrar todo el procedimiento seguido.

SECCIÓN A

*Conteste **todas** las preguntas en los espacios provistos. De ser necesario, se puede continuar desarrollando la respuesta en el espacio que queda debajo de las líneas.*

1. *[Puntuación máxima: 5]*

Una variable aleatoria continua X tiene la siguiente función densidad de probabilidad f

$$f(x) = \begin{cases} c(x - x^2), & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{demás valores.} \end{cases}$$

(a) Determine c. *[3 puntos]*

(b) Halle $\mathrm{E}(X)$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. *[Puntuación máxima: 6]*

(a) Exprese la función cuadrática $3x^2 - 6x + 5$ de la forma $a(x+b)^2 + c$, donde a, b, $c \in \mathbb{Z}$. *[3 puntos]*

(b) Describa una secuencia de transformaciones que transforme la gráfica de $y = x^2$ en la gráfica de $y = 3x^2 - 6x + 5$. *[3 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

3. *[Puntuación máxima: 5]*

Los tres vectores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{c}$ vienen dados por

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2y \\ -3x \\ 2x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 4x \\ y \\ 3-x \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix} \text{ donde } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Si $\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = 0$, halle el valor de x y de y. *[3 puntos]*

(b) Halle el valor exacto de $|\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}|$. *[2 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4. *[Puntuación máxima: 4]*

Una moneda no equilibrada está trucada, de tal modo que la probabilidad de que salga cara es $\frac{4}{7}$. Se lanza la moneda al aire 6 veces, y X representa el número de veces que sale cara. Halle el valor de la razón $\frac{\mathrm{P}(X=3)}{\mathrm{P}(X=2)}$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. *[Puntuación máxima: 7]*

Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Halle BA. *[2 puntos]*

(b) Calcule $\det(BA)$. *[2 puntos]*

(c) Halle $A(A^{-1}B + 2A^{-1})A$. *[3 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

6. *[Puntuación máxima: 6]*

Si x satisface la ecuación $\operatorname{sen}\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=2\operatorname{sen} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)$, compruebe que $11 \operatorname{tg} x = a + b\sqrt{3}$, donde a, $b \in \mathbb{Z}^{+}$.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

7. *[Puntuación máxima: 8]*

La función f se define de la siguiente forma: $f(x) = \mathrm{e}^{x^2 - 2x - 1{,}5}$.

(a) Halle $f'(x)$. *[2 puntos]*

(b) Se le dice que $y = \dfrac{f(x)}{x-1}$ tiene un mínimo local en $x = a$, $a > 1$. Halle el valor de a. *[6 puntos]*

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

8. *[Puntuación máxima: 7]*

La normal a la curva $xe^{-y} + e^{y} = 1 + x$ en el punto $(c, \ln c)$ corta al eje y en $c^2 + 1$.

Determine el valor de c.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

9. *[Puntuación máxima: 6]*

Halle el valor de $\int_0^1 t\ln(t+1)\,\mathrm{d}t$.

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

10. *[Puntuación máxima: 6]*

La función f se define de la siguiente forma: $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-1}$, $x \neq 1$.

(a) Halle una expresión para $f^{-1}(x)$. *[3 puntos]*

(b) Resuelva la ecuación $\left| f^{-1}(x) \right| = 1 + f^{-1}(x)$. *[3 puntos]*

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

SECCIÓN B

*Conteste **todas** las preguntas en las hojas de respuestas provistas. Empiece una página nueva para cada respuesta.*

11. *[Puntuación máxima: 10]*

(a) Considere la siguiente sucesión de ecuaciones:

$$1\times 2=\frac{1}{3}(1\times 2\times 3),$$
$$1\times 2+2\times 3=\frac{1}{3}(2\times 3\times 4),$$
$$1\times 2+2\times 3+3\times 4=\frac{1}{3}(3\times 4\times 5),$$
$$\ldots .$$

(i) Formule una conjetura para la n-ésima ecuación de la sucesión.

(ii) Verifique su conjetura para $n=4$. *[2 puntos]*

(b) El término n-ésimo de una sucesión de números viene dado por $u_n=2^n+3,\ n\in\mathbb{Z}^+$. Bill conjetura que todos los elementos de la sucesión son números primos. Compruebe que la conjetura de Bill es falsa. *[2 puntos]*

(c) Utilice la inducción matemática para demostrar que $5\times 7^n+1$ es divisible por 6 para todo $n\in\mathbb{Z}^+$. *[6 puntos]*

12. *[Puntuación máxima: 19]*

(a) Considere los vectores $\boldsymbol{a} = 6\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{b} = -3\boldsymbol{j} + 4\boldsymbol{k}$.

(i) Halle el coseno del ángulo que forman los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$.

(ii) Halle $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$.

(iii) **A partir de lo anterior**, halle la ecuación cartesiana del plano Π que contiene a los vectores $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ y pasa por el punto $(1, 1, -1)$.

(iv) El plano Π corta al plano x-y en la recta l. Halle el área de la región triangular finita delimitada por la recta l, el eje x y el eje y. *[11 puntos]*

(b) Dados dos vectores $\boldsymbol{p}$ y $\boldsymbol{q}$,

(i) compruebe que $\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{p} = |\boldsymbol{p}|^2$;

(ii) a partir de lo anterior o de cualquier otro modo, compruebe que $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}|^2 = |\boldsymbol{p}|^2 + 2\boldsymbol{p} \bullet \boldsymbol{q} + |\boldsymbol{q}|^2$;

(iii) deduzca que $|\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}| \le |\boldsymbol{p}| + |\boldsymbol{q}|$. *[8 puntos]*

13. *[Puntuación máxima: 16]*

Considere $\omega = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\,\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

(a) Compruebe que

(i) $\omega^3 = 1$;

(ii) $1 + \omega + \omega^2 = 0$. *[5 puntos]*

(b) (i) Deduzca que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right)} = 0$.

(ii) Represente este resultado para $\theta = \frac{\pi}{2}$ mediante un diagrama de Argand. *[4 puntos]*

(c) (i) Desarrolle y simplifique $F(z) = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)$ donde z es un número complejo.

(ii) Resuelva $F(z) = 7$; dé las respuestas en función de ω. *[7 puntos]*

14. *[Puntuación máxima: 15]*

A lo largo de esta pregunta, x satisface $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

(a) Resuelva la ecuación diferencial $\sec^2 x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2$, sabiendo que $y = 1$ para $x = 0$.

Dé la respuesta de la forma $y = f(x)$. *[7 puntos]*

(b) (i) Demuestre que $1 \le \sec x \le 1 + \mathrm{tg}\, x$.

(ii) Deduzca que $\frac{\pi}{4} \le \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x \,\mathrm{d}x \le \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2$. *[8 puntos]*